دانشگاه فرهنگیان
دوفصلنامه علمی
نظریه و عمل در تربیت معلمان
سال هشتم، شماره چهاردهم، پاییز و زمستان ۱۴۰۱

بازنمایی‌های چندگانه در کتاب ریاضی پایه دهم نظری

نرگس یافتیان[۱]
ساناز احمدی[۲]

چکیده

یکی از اهداف مهم آموزش ریاضی، ایجاد درک مفهومی برای دانش‌آموزان است. بر اساس نتایج پژوهش‌های متعدد، بازنمایی‌های چندگانه می‌توانند به‌عنوان ابزاری برای رسیدن به درک مفهومی به خدمت گرفته شوند. در این پژوهش، کتاب ریاضی پایه دهم نظری بر اساس میزان به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه به روش تحلیل محتوا بررسی شد. جامعه آماری، کتاب ریاضی پایه دهم نظری و نمونه برابر جامعه است. به‌منظور اعتباریابی و روایی تحلیل، از نظرات اساتید آموزش ریاضی و دبیران باتجربه استفاده شد. همچنین جهت اعتبار نتایج، ضریب توافق ۸۵% از فرمول پایایی ویلیام اسکات به دست آمد. در این مطالعه بازنمایی‌ها در قسمت‌های کار در کلاس، فعالیت، مثال و متن کتاب بررسی شده است و سپس در یکی از انواع نمادین، عددی، گرافیکی و کلامی دسته‌بندی شدند. نتایج این پژوهش نشان داد که بازنمایی‌های چندگانه در

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۱۲ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۱/۱۰

۱. استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی (نویسنده مسؤول)
yaftian@sru.ac.ir

۲. دانش‌آموخته کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران
Sahmadi.math@yahoo.com

تمامی فصل‌ها برای ارائه مفاهیم در کتاب به‌کار برده شده‌اند. این مطلب بیشتر در مورد فصل‌های الگوها، دنباله و تابع صدق می‌کند. همچنین بیشترین ارتباط بین بازنمایی‌های نمادین و عددی برقرار شده است و بر مرتبط‌ساختن انواع بازنمایی‌ها با بازنمایی کلامی توجه چندانی نشده است. امید است مؤلفان و دست‌اندرکاران آموزشی برای ارائه محتوا در تألیف کتاب‌های درسی بر تلفیق انواع بازنمایی‌ها جهت معرفی مفاهیم ریاضی تأکید بیشتری نمایند.

کلید واژه‌ها: تحلیل محتوا، بازنمایی‌های چندگانه، کتاب ریاضی پایه دهم.

۱. مقدمه

یکی از دغدغه‌های معلمان و آموزشگران ریاضی این است که دانش‌آموزان قادر باشند ایده‌های ریاضی را بازآفرینی کنند، بین ایده‌های خود و دیگران ارتباط برقرار کنند، استدلال کرده و تعمیم بدهند. به نظر می‌رسد ماهیت انتزاعی ریاضیات، عامل مهمی است که سبب شده است تا فراگیران برای درگیرشدن در فعالیت‌های ریاضی تمایل چندانی از خود نشان ندهند. هنر آموزشگران ریاضی و همچنین متون درسی در این است که باطن شهودی و ملموس ریاضی را هر چه بیشتر آشکار نمایند و بین تجربیات افراد با دانش آنها ارتباط برقرار کنند. یکی از روش‌های برقراری ارتباط بین تجربیات (دانش غیررسمی فراگیران) و دانش رسمی ریاضیات، استفاده از بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم است (دافعی،۱۳۹۴). تحقیقات انجام شده حاکی از آن است که اگر دانش‌آموزان در کلاس‌های درس بتوانند مفاهیم ریاضی را به صورت‌های مختلف بیان کنند و یا نمایش دهند، یادگیری آنها عمیق‌تر خواهد بود. در واقع درگیرشدن در فعالیت‌هایی که انجام آنها مستلزم استفاده از چند «بازنمایی[1]» به‌طور هم زمان است، باعث می‌شود ابعاد پنهان مفهوم ریاضی موردنظر برای دانش‌آموزان آشکار گردد و قدرت استدلال نیز در آنها افزایش یابد (آینسورت[2]، ۱۹۹۹، ۲۰۰۶؛ سلینگ[3]، ۲۰۱۶؛ گیتونگا[4]،

1. representation
2. Ainsworth
3. Selling
4. Gitonga

۲۰۱۶، رائو و ماتئوس[1]، ۲۰۱۷؛ کارناز و بایری[2]، ۲۰۱۸؛ رائو و همکاران، ۲۰۱۷).

کستبرگ[3] (۲۰۰۲، به نقل از گویا و امامی، ۱۳۹۲) بازنمایی فرد از یک مفهوم ریاضی را شامل نشانه‌ها و علامت‌هایی می‌داند که وی از آنها برای فکرکردن به آن مفهوم و ارتباط‌دادن آن با سایر مفاهیم استفاده می‌کند. درواقع، بازنمایی، ترکیبی از کاراکترها، علامت‌ها، تصاویر یا اشیا برای بیان ایده‌های ریاضی است (گیتونگا، ۲۰۱۶). همچنین بازنمایی‌ها را می‌توان اشیا خارجی نظیر جدول‌ها، گراف‌ها، کلمات یا نمادهایی دانست که بر روابط مفهومی دلالت دارند و به‌عنوان ابزاری برای کدگذاری، توصیف روابط ریاضی، برقراری ارتباط بین مفاهیم ریاضی و عمل‌کردن روی اشیا ریاضی استفاده می‌شوند (بوس و همکاران، ۲۰۱۱). شورای ملی معلمان ریاضی[4] (۲۰۰۰) نیز مفهوم بازنمایی را به‌صورت عمل بیان یک مفهوم یا رابطه در برخی از شکل‌ها به‌علاوه شکل خودش تعریف کرده است. یک فرایند یاددهی می‌تواند با دادن یک تکلیف یا مسئله معنادار به دانش‌آموزان شروع شود، سپس با تشویق آنها برای حل مسئله از روش‌های مختلف ادامه یافته و سرانجام منجر به این شود که دانش‌آموزان راهبردهای خود را به اشتراک گذاشته در مورد آنها به بحث بپردازند. در چنین فرایندی دانش‌آموزان علاوه بر تولید بازنمایی‌های مختلف، قادرند ایده‌ها و دانش جدیدشان را بسازند و در این صورت درک مفهومی آنها از مفاهیم توسعه می‌یابد (بوس و باهر[5]، ۲۰۰۸). گاهی اوقات به‌کارگیری نمایش‌های نمادی می‌تواند به ملموس‌تر و محسوس‌تر شدن ایده‌های ریاضی کمک کند (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰؛ سوچانسکی[6]، ۲۰۱۸؛ امرسون و اندرسون[7]، ۲۰۱۸). همچنین، بازنمائی‌های های مفاهیم مختلف به کمک نمودارها، می‌توانند در توسعه منطق ریاضی به دانش‌آموزان کمک کند (سوچانسکی، ۲۰۱۸).

---

1. Rau & Matthews
2. Kurnaz & Bayri
3. Kastberg
4 . National Council of Teacher of Mathematics(NCTM)
5. Boss & Bahr
6. Sochanski
7. Emerson & Dawn Anderson

بازنمایی‌ها گاهی مرتبط با ساختار ذهنی فرد هستند که در این صورت تحت عنوان «بازنمایی‌های درونی» شناخته می‌شوند و گاهی به ساخت‌های فیزیکی اشاره دارند که به آنها «بازنمایی‌های بیرونی» گفته می‌شود. در واقع، بازنمایی درونی، بازنمایی است که در ذهن یادگیرنده اتفاق می‌افتد و می‌تواند به مدل‌های شناختی، طرح‌واره‌ها، مفاهیم یا اشیای ذهنی ارجاع داده شود؛ ولی بازنمایی‌های بیرونی، نمودهایی از ایده‌ها یا مفاهیم ریاضی هستند، مانند جداول، نمادهای جبری، نمودارها و اشکال و بیانات کلامی (اربیلگین[1]، ۲۰۰۳). این تقسیم‌بندی توسط گلدین[2] (۲۰۰۰، به نقل از گیتونگا، ۲۰۱۶) نیز ارائه شده است. تعبیر گلدین از بازنمایی‌های بیرونی «سازه‌هایی برای درک ریاضیات» است. این بازنمایی‌ها آسان استفاده می‌شوند، به تجسم کمک می‌کنند و کلی و همگانی هستند. دسته دوم؛ یعنی بازنمایی‌های درونی طبق تعریف گلدین، «ساخت‌های مجدد از رفتارهای ریاضی» است که شخصی هستند و به طور مستقیم دیده نمی‌شوند و دانش مربوط به آنها در صورت تعامل با بازنمایی‌های بیرونی شناخته می‌شود. به‌عنوان‌مثال، وقتی شخصی یک نمودار را برای مفهوم تابع در نظر می‌گیرد، این نمودار یک بازنمایی بیرونی است و مفهومی که به‌عنوان تابع در ذهن شخص القا می‌کند یک بازنمایی درونی است.

وقتی یک بازنمایی به‌تنهایی برای انتقال اطلاعات در یک حوزه خاص کافی نباشد، لازم است چند بازنمایی به‌طور هم زمان طوری به کار گرفته شوند که شخص متوجه وجود ارتباط بین انواع این بازنمایی‌ها باشد. زیرا طبق نظر آینسورت (۲۰۰۶)، بازنمایی‌ها از نظر اطلاعات متفاوت هستند و هر یک از آنها می‌تواند دیگر بازنمایی‌ها را از این نظر پشتیبانی کند. چنانچه دانش‌آموزان بتوانند یک مسئله را با به‌کارگیری بیش از یک بازنمایی حل کنند؛ اما آنها را دارای ماهیت جداگانه ببینند، یادگیری‌شان عادتی و طوطی‌وار خواهد بود (گویا و حسام، ۱۳۸۴). ایجاد ارتباط بین انواع بازنمایی‌ها توسط تال[3] (۱۹۹۱، به نقل از دافعی، ۱۳۸۹) نیز مورد تأکید قرار گرفته است. وی چهار مرحله برای فرایند یادگیری ریاضی معرفی می‌کند:

---

1. Erbilgin
2. Goldin
3. Tall

- استفاده از یک نوع بازنمایی؛
- استفاده از بیش از یک نوع بازنمایی به‌صورت موازی؛
- ایجاد ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های مختلف؛
- تلفیق بازنمایی‌ها و حرکت منعطف بین آنها.

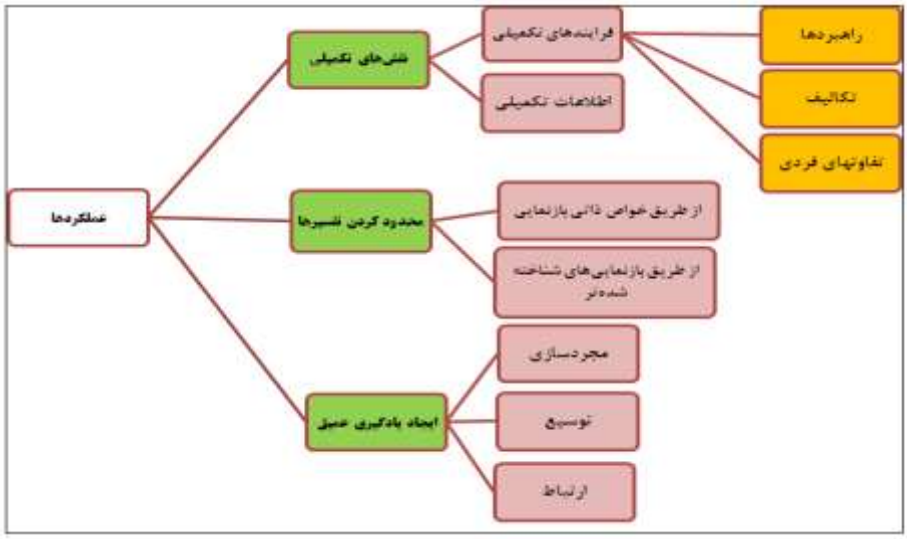
به گفته شورای ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰)، برنامه‌های آموزشی باید همه دانش‌آموزان را قادر سازد تا نه‌تنها بتوانند از بازنمایی‌های مختلف استفاده کنند، بلکه آنها را به‌عنوان ابزاری برای یادگیری ریاضی، انتقال ایده‌ها و حل مسئله به کار برند. ازآنجاکه ایجاد ارتباط بین انواع بازنمایی‌ها توسط محققان آموزش ریاضی بسیار مورد تأکید واقع شده است (باکار[1] و همکاران، ۲۰۲۰؛ کزما[2]، ۲۰۲۰؛ گیتونگا، ۲۰۱۶؛ گارفالو و ترینتر[3]،۲۰۱۲؛ بوس و همکاران، ۲۰۱۱؛ آینسورت، ۲۰۰۶؛ دافعی، ۱۳۸۹؛ نوروزی و همکاران، ۱۳۸۹)، بنابراین لازم است استفاده از «بازنمایی‌های چندگانه[4]» برای طراحی فعالیت‌های آموزشی موردتوجه بیشتری واقع گردد. بازنمایی‌های چندگانه به معنای فراهم‌کردن اطلاعات مشابه توسط بیش از یک بازنمایی است (یلوسوی و اینسی‌کابی[5]، ۲۰۱۹؛ تکی[6] و همکاران، ۲۰۱۹؛ گیتونگا، ۲۰۱۶). در واقع، منظور از بازنمایی‌های چندگانه، استفاده از چندین بازنمایی به‌صورت هم زمان است، به‌طوری که بین آنها ارتباط مناسبی برقرار گردد. موضوع بازنمایی‌های چندگانه در درک مفاهیم ریاضی با کارهای دینس[7] (۱۹۶۰) که متأثر از نظریه پیاژه بود، اهمیت پیدا کرد (به نقل از قربانی سی‌سخت، ۱۳۸۸). در کارهای دینس، مفهوم بازنمایی‌های چندگانه با عنوان «اصل تغییرپذیری مفهومی[8]» نام‌برده‌شده است که به معنای ارائه یک ساختار مفهومی در قالب تعدادی از بازنمایی‌های معادل است، به‌طوری‌که کودکان بتوانند توسط آنها به جوهره ریاضیِ یک مفهوم انتزاعی دست پیدا کنند.

---

1. Bakar
2. Kozma
3. Garofalo & Trinter
4. multiple representations
5. Ulusoy & Incikabi
6. Tackie
7. Dienes
8. perceptual variability principle

بر اساس نتایج پژوهش‌های متعدد (ازجمله، گیتونگا، ۲۰۱۶؛ آینسورت، ۲۰۰۶، رائو و ماتئوس، ۲۰۱۷؛ کارناز و بایری، ۲۰۱۸؛ رائو و همکاران، ۲۰۱۷، نوروزی و همکاران، ۱۳۸۹)، بازنمایی‌های چندگانه می‌توانند به‌عنوان ابزاری برای رسیدن به درک مفهومی به‌خدمت گرفته شوند. به‌طورکلی استفاده از بازنمایی‌های چندگانه دارای مزیت‌های فراوانی است که برای سود بردن از آنها ابتدا یادگیرندگان باید با مزیت‌های هر بازنمایی آشنا شوند. برای مثال وقتی بازنمایی جدولی را به‌کار می‌بریم، مقادیر خاص به‌وضوح مشخص می‌شوند (رابرت ای ریس و همکاران، ۲۰۰۲، ترجمه نوروزیان، ۱۳۹۱؛ آینسورت، ۱۹۹۹)، مقدارهای مجهول و ناشناخته برجسته شده و همچنین نظم و قاعده بین اعداد موردتوجه قرار می‌گیرد. استفاده از این نوع بازنمایی درعین‌حال باعث تسریع و تصریح خواندن می‌شود. درصورتی‌که این‌گونه روابط کمی، در بازنمایی‌های نمادین نظیر معادلات به‌روشنی بیان نمی‌گردند. در عوض بازنمایی‌های نمادین، اطلاعات انتزاعی و مجرد را به‌طور ساده‌تری بیان می‌کنند (آینسورت، ۲۰۰۶). پس از مهارت یافتن در به‌کارگیری هر بازنمایی، دانش‌آموزان باید از طریق تکالیف هدفمند بتوانند بازنمایی‌های مختلف را تلفیق کرده، بین آنها ارتباط برقرار کنند و قادر باشند یک بازنمایی را به دیگر بازنمایی‌ها ترجمه کنند. منظور از ترجمه، فرایندی است که در آن محصولات یک بازنمایی ریاضی به دیگر بازنمایی‌ها نگاشته می‌شوند (بوس و همکاران، ۲۰۱۱). در مطالعه‌ای، بوس و همکاران (۲۰۱۱) در مورد ارتباط بین توانایی دانش‌آموزان در انجام ترجمه بین بازنمایی‌ها و باور معلمان در این زمینه و همین‌طور تمرین‌های آموزشیِ کلاس درس، تحقیق کردند. نتایج بیانگر آن است که اگر بازنمایی کلامی را با V، بازنمایی نمادین را با S ، بازنمایی گرافیکی را با G و بازنمایی جدولی و عددی را با T نمایش دهیم، دانش‌آموزان ترجمه‌های ($V\rightarrow T$، $S\rightarrow G$، $S\rightarrow T$، $T\rightarrow G$، $G\rightarrow T$) را بهتر انجام می‌دهند و در بقیه موارد توانایی کمتری دارند. اما، انتظارات معلمان از دانش‌آموزان این است که ترجمه $V\rightarrow S$ را نیز به‌خوبی انجام دهند. باور معلمان در مورد این‌که برخی از ترجمه‌ها برای دانش‌آموزان مشکل‌تر هستند، بر آنچه که در کلاس درس انجام می‌دهند، تأثیر می‌گذارد و همچنین به دانش‌آموزان نیز منتقل می‌گردد و ممکن است معلمان بنا به این طرز تلقی، مواد آموزشی موردنیاز آن ترجمه‌ها را نیز کاهش دهند (بوس و همکاران، ۲۰۱۱).

به‌طورکلی دانش‌آموزان از طریق کارکردن روی تکالیفی که قابلیت به‌کارگیری هم زمان چندین بازنمایی را دارند، می‌توانند تفکرشان را درباره ایده‌های ریاضی توسعه داده و توانایی حل مسئله خود را بهبود بخشند. تاکنون مطالعات بسیاری در مورد تأثیر استفاده از بازنمایی‌ها بر یادگیری ریاضی انجام شده است. برای مثال محققان پس از بررسی فواید به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی مدرسه‌ای، عملکردهای متعددی برای این بازنمایی‌ها معرفی کرده‌اند (آینسورت، ۱۹۹۹؛ ۲۰۰۶). آینسورت (۲۰۰۶) یک طبقه‌بندی برای عملکردهای متفاوت بازنمایی‌ها معرفی کرده است که در شکل ۱ نمایش‌داده‌شده است.



شکل ۱– طبقه‌بندی عملکردی بازنمایی‌های چندگانه (آینسورت، ۲۰۰۶، ص ۱۸۷)

در شکل ۱ عملکرد کلی بازنمایی‌های چندگانه به سه دسته، تقسیم‌بندی می‌شوند. اولین وظیفه آنها ایفای نقش تکمیلی است. همچنین در مسیر استفاده از آنها، دامنه تفسیرهای یادگیرندگان محدود می‌شود و درنهایت، استفاده از بازنمایی‌های چندگانه منجر به ایجاد یادگیری عمیق خواهد شد.

در کشور ما نیز یکی از مواردی که در فرایند یاددهی و یادگیری در حوزه آموزش ریاضی موردتوجه است، به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه است. در سند برنامه درسی ملی کشورمان در بخش ریاضیات و در قسمت قلمرو حوزه، موضوع تفکر تجسمی یا

دیداری و تفکر خلاق در کنار دیگر فرایندهای ریاضی، موردتوجه و تأکید قرار گرفته است (دبیرخانه تولید برنامه درسی،۱۳۹۱) و همان‌طور که می‌دانیم پرورش تجسم، در گرو استفاده از بازنمایی‌ها و بهره‌گیری از فرایندهای ادراک است (فینک[1] ۱۹۸۵، به نقل از عرب‌زاده و همکاران، ۱۳۹۰). گرچه استفاده از تجسم در حل مسائل به‌صورت فطری در افراد وجود دارد، لیکن دانش‌آموزان برای پرورش تفکر تجسمی نیاز به کسب تجربه در محیط‌های یادگیری دارند. این تجربه بهتر است به کمک منابع آموزشی در دوران مدرسه کسب شود. در کشور ما یکی از منابع تأثیرگذار بر یادگیری و پیشرفت دانش‌آموزان، کتاب درسی است. پس علاوه بر این که معلمان در فرایند آموزشی می‌بایست دانش‌آموزان را ترغیب به استفاده از انواع بازنمایی‌ها نمایند، لازم است طیفی از بازنمایی‌ها در کتاب درسی، به‌خصوص برای حل مسائل پیچیده پیش روی دانش‌آموزان قرار گیرد و در خلال محتوای درسی، ارتباط مناسبی بین این بازنمایی‌ها برقرار گردد. این موارد و تأکیدات مشابهی که در پژوهش‌های مختلف برای لزوم به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه وجود دارد، منجر به شکل‌گیری پژوهش حاضر گردید. این پژوهش به‌طور مشخص به دنبال پاسخ‌دادن به پرسش‌های زیر است:

۱- در کتاب ریاضی پایه دهم رشته‌های علوم تجربی و ریاضی فیزیک، تا چه اندازه از انواع بازنمایی‌های چندگانه استفاده شده است؟

۲- در کتاب ریاضی پایه دهم رشته‌های علوم تجربی و ریاضی فیزیک، بیشترین ارتباط بین کدام دسته از بازنمایی‌ها برقرار شده است؟

۱,۱.روش پژوهش

این پژوهش به روش تحلیل محتوای کمی، با رویکرد توصیفی - تحلیلی انجام‌گرفته است. تحلیل محتوا، فنی به‌منظور یافتن نتایج پژوهش از طریق تعیین عینی و منظم خصوصیات مشخص پیام‌هاست (هولستی، ۱۳۸۰). جامعه آماری، کتاب ریاضی پایه دهم رشته‌های تجربی و ریاضی است (امیری و همکاران، ۱۴۰۰) و محتوای این کتاب ۱۷۰ صفحه است که شامل ۷ فصل است. حجم نمونه با حجم جامعه برابر است؛ یعنی کلیه فصل‌های کتاب مورد بررسی قرار گرفته است.

---

1. Fink

ابزار پژوهش، فرم‌های تحلیل محتوای محقق ساخته باتوجه‌به الگوی تحلیل است. واحد تحلیل شامل واحد ثبت و واحد زمینه است. واحد ثبت، به بخش معنی‌دار و قابل کدگذاری گفته می‌شود که در اجرای تحلیل، از محتوا انتخاب شده و مورد شمارش قرار می‌گیرد. «واحد زمینه وسیع‌ترین بخش محتواست که می‌توان آن را برای مشخص‌کردن واحد ثبت مورد بررسی قرار داد» (هولستی، ۱۳۸۰، ص ۱۸۴). باتوجه‌به اینکه در مطالعه حاضر نحوه ارائه بازنمایی‌های چندگانه توسط کتاب مدنظر است، بنابراین بخش‌های مختلف شامل متن درس، کار در کلاس، فعالیت و مثال، به‌عنوان واحد زمینه در نظر گرفته شده‌اند و واحدهای ثبت، کلیه سؤالات مطرح شده در بخش‌های کار در کلاس، فعالیت، مثال‌ها و همچنین هر یک از موضوعات توضیح داده شده در متن درس هستند. مضمون موردنظر (مقوله‌ها) جهت تحلیل محتوا در این پژوهش، هر یک از انواع بازنمایی‌های نمادین، کلامی، عددی و گرافیکی و همچنین ترجمه بین این بازنمایی‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

بازنمایی نمادین: در این بازنمایی، هر نماد یا عبارت جبری، نماینده یک مفهوم ریاضی است، درحالی‌که تشابهی با آن مفهوم ندارد.

بازنمایی کلامی: در این نوع بازنمایی، از کلمات و توضیحات برای صحبت‌کردن در مورد یک مفهوم یا رابطه ریاضی، استفاده می‌گردد.

بازنمایی عددی: در این بازنمایی برای بیان مفاهیم و روابط ریاضی از عدد و رقم و یا جدول‌های شامل اعداد استفاده می‌گردد.

بازنمایی گرافیکی: این بازنمایی شامل استفاده از تصاویر و نمودارها برای بیان یک مفهوم یا رابطه ریاضی است.

جهت تحلیل محتوا، در ابتدا به هر یک از بازنمایی‌های کلامی، نمادین، عددی و گرافیکی یک کد نسبت داده شد و سپس واحدهای ثبت براین‌اساس کدگذاری گردید. در مرحله بعد، واحدهایی که در آنها چندین بازنمایی با یکدیگر مرتبط شده بودند نیز مشخص شد و داده‌های حاصل با استفاده از شیوه‌های آمار توصیفی مورد تجزیه‌وتحلیل قرار گرفتند. به‌منظور اعتباریابی، از نظرات و دیدگاه‌های صاحب‌نظران و اساتید آموزش ریاضی و معلمان باسابقه ریاضی استفاده شد. برای بررسی پایایی فرایند کدگذاری در دوزمان مختلف و با بهره‌گیری از دیدگاه‌های صاحب‌نظران و اساتید آموزش ریاضی انجام شد و درصد توافق از فرمول ضریب پایایی اسکات، محاسبه گردید و ضریب پایایی ۸۵% به دست آمد.

۲. یافته‌های پژوهش

در این بخش، با استفاده از نتایج حاصل از تحلیل محتوای کتاب، به سؤالات پژوهش پاسخ داده می‌شود.

سؤال ۱ پژوهش: در کتاب ریاضی پایه دهم رشته‌های علوم تجربی و ریاضی فیزیک، تا چه اندازه از انواع بازنمایی‌های چندگانه استفاده شده است؟

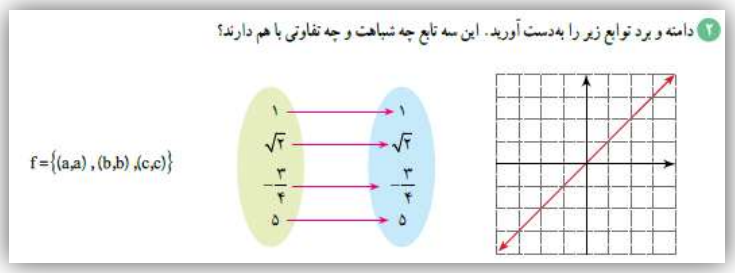
برای پاسخ به این سؤال، واحدهای تحلیل بنا به تعداد بازنمایی‌هایی که در آنها به کار برده شده است، تفکیک شدند. البته در این مطالعه برخی از سؤالات نظیر سؤالاتی که جواب آنها بله - خیر است، به‌عنوان واحدهای تحلیل محسوب نشدند؛ زیرا استفاده از بازنمایی در آنها معنایی ندارد. نتایج حاصل از بررسی واحدهای تحلیل بر اساس به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه در جدول ۱ ارائه شده است

جدول ۱- فراوانی انواع سؤالات از لحاظ به‌کارگیری بازنمایی‌ها در کتاب

فصل‌ها	سؤالات دارای یک نوع بازنمایی		سؤالات دارای چند بازنمایی جداگانه		سؤالات دارای چند بازنمایی مرتبط	
	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
فصل ۱	۱۰	۱۶/۹	۴	۶/۸	۴۵	۷۶/۳
فصل ۲	۲۶	۵۷/۸	۰	۰	۱۹	۴۲/۲
فصل ۳	۳۸	۶۹/۱	۱	۱/۸	۱۶	۲۹/۱
فصل ۴	۲۶	۴۶/۴	۰	۰	۳۰	۵۳/۶
فصل ۵	۱۱	۳۳/۳	۲	۶/۱	۲۰	۶۰/۶
فصل ۶	۳۱	۶۸/۹	۰	۰	۱۴	۳۱/۱
فصل ۷	۳۸	۷۰/۴	۰	۰	۱۶	۲۹/۶
مجموع	۱۸۰	۵۱/۹	۷	۲/۰۲	۱۶۰	۴۶/۱

داده‌های موجود در سطر آخر جدول ۱ نشان می‌دهند که ۵۱/۹% از کل سؤالات کتاب، فقط یک نوع بازنمایی را ارائه کرده‌اند. قسمت مربوط به سؤالات با چند بازنمایی مرتبط نشان می‌دهد این نوع سؤالات، بیش از ۴۶ درصد از حجم نمونه را تشکیل می‌دهند؛ بنابراین در پاسخ به اولین سؤال پژوهش می‌توان گفت تقریباً نزدیک به نیمی از سؤالات یا متن کتاب، بازنمایی‌های چندگانه به معنای واقعی به کار برده شده‌اند، یعنی چندین بازنمایی به‌صورت مرتبط با یکدیگر برای انتقال مفهوم موردنظر آن سؤال، ارائه

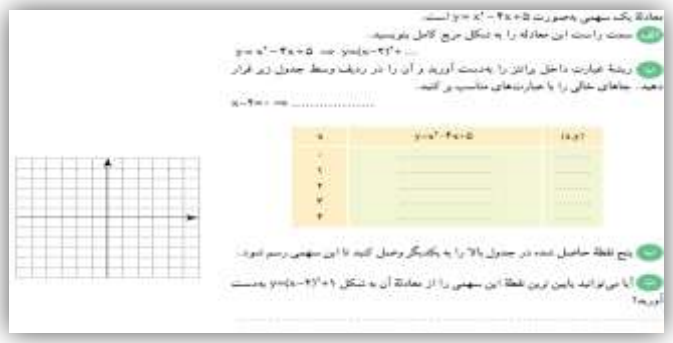
شده‌اند. طبق داده‌های جدول ۱ در فصل اول یعنی مجموعه، الگو و دنباله و همچنین فصل پنجم یعنی تابع، به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه بیش از بقیه فصل‌ها بوده است. در جدول ۱ منظور از سؤالات دارای چند بازنمایی جداگانه، سؤالاتی است که با وجود به‌کارگیری چند نوع بازنمایی به‌صورت موازی، ارتباط مناسبی بین آنها برقرار نشده است. در شکل ۲ نمونه‌ای از این‌گونه سؤالات نشان‌داده‌شده است.



شکل ۲- فعالیت صفحه ۱۱۰

در این سؤال برای یافتن دامنه و برد توابع، بازنمایی‌های نمادین و گرافیکی به‌کار برده شده، ولی ارتباط محسوسی بین آنها برقرار نشده است.

طبق جدول ۱ در تعدادی از واحدهای تحلیل، سؤالاتی با چند نوع بازنماییِ مرتبط مطرح شده‌اند که در آنها علاوه بر اینکه چند نوع بازنمایی ارائه شده است، ارتباط مشخصی نیز بین بازنمایی‌ها برقرار گردیده است. نمونه‌ای از این سؤالات در شکل ۳ نشان‌داده‌شده است.



شکل ۳- فعالیت صفحه ۷۹

برای انجام این فعالیت، بازنمایی‌های نمادین، عددی و گرافیکی به کار گرفته می‌شوند. یادگیرنده در حین انجام چنین فعالیتی، ابتدا از بازنمایی نمادین (معادله)، به بازنمایی عددی می‌رسد و با استفاده از نقاط به‌دست‌آمده، بازنمایی گرافیکی از این معادله را تولید می‌کند. سپس در قسمت «ت»، دانش‌آموز مختصات رأس سهمی را هم از طریق نمایش نمودار تابع و هم به‌وسیله ضابطه تابع به‌دست می‌آورد. در واقع، بین بازنمایی نمادین و بازنمایی گرافیکی ارتباط برقرار شده است.

سؤال ۲ پژوهش: در کتاب ریاضی پایه دهم رشته‌های علوم تجربی و ریاضی فیزیک، بیشترین ارتباط بین کدام دسته از بازنمایی‌ها برقرار شده است؟

برای پاسخ‌گویی به این سؤال، میزان تأکید کتاب بر «ترجمه» انواع بازنمایی‌ها به یکدیگر نیز موردتوجه بوده است. در واقع، هنگامی‌که یادگیرنده یک‌شکل از نمایشِ یک مفهوم ریاضی را به شکل دیگری تبدیل می‌کند، به‌نوعی بین این دو بازنمایی ارتباط برقرار می‌کند. به‌منظور ایجاد یادگیری بهتر، انواع بازنمایی‌ها در کتاب به یکدیگر ترجمه شده‌اند و گاه این ترجمه در کار در کلاس و یا فعالیت، از دانش‌آموز خواسته شده است. نتایج کمیِ این بررسی در جدول ۲ خلاصه شده است.

جدول ۲- درصد فراوانی سؤالات از لحاظ به‌کارگیری انواع بازنمایی‌های مرتبط و غیرمرتبط

بازنمایی	فصل ۱	فصل ۲	فصل ۳	فصل ۴	فصل ۵	فصل ۶	فصل ۷	مجموع
گرافیکی- نمادین	۳/۴	۶/۷	۳/۶	۱۹/۶	۹/۱	-	-	۶
عددی - نمادین	۲۳/۷	۶/۷	۱۰/۹	۳/۶	-	۱۱/۱	۵/۵	۹/۴
کلامی - نمادین	۳/۴	۶/۷	-	۸/۹	-	۴/۴	۱/۸	۳/۷
گرافیکی - کلامی	۱/۷	۲/۲	-	-	۶/۱	-	-	۱/۱
عددی - کلامی	۵/۱	-	۳/۶	-	۶/۱	۴/۴	۱۱/۱	۴/۳
عددی - گرافیکی	۶/۸	۱۱/۱	۱/۸	-	۶/۱	۸/۹	۱/۸	۴/۸
بیش از ۲ بازنمایی مرتبط	۲۸/۸	۶/۷	۷/۳	۱۹/۶	۳۳/۳	۲/۲	۷/۴	۱۴/۶
بازنمایی‌های غیرمرتبط	۶/۸	-	۱/۸	۱/۸	۶/۱	-	-	۲/۳

هر عدد در جدول ۲ نشان می‌دهد فراوانی واحدهایی که در آنها دو یا چند بازنمایی خاص با هم مرتبط هستند، نسبت به بقیه واحدهای فصل چقدر است. به‌عنوان‌مثال در فصل اول در ۳/۴ درصد از واحدهای این فصل، بازنمایی‌های گرافیکی و نمادین با هم مرتبط شده‌اند. ستون آخر، درصد هر دسته از بازنمایی‌ها را در کل کتاب نشان می‌دهد.

داده‌های جدول ۲ حاکی از آن است در سؤالاتی که در آنها فقط دو نوع بازنمایی به‌کاررفته است، بیشترین ارتباط بین بازنمایی‌های **عددی** و **نمادین** برقرار شده است. در واقع از کل سؤالات کتاب، ۹/۴ درصد، سؤالاتی هستند که در آنها بازنمایی‌های عددی و نمادین مرتبط شده‌اند. همچنین، این نوع ارتباط اغلب در فصل ۱ یعنی مبحث مجموعه، الگو و دنباله مشاهده می‌شود. به‌طورکلی در کتاب، بازنمایی‌های کلامی با بازنمایی‌های گرافیکی و نمادین کمتر مرتبط شده‌اند. به بیان دقیق‌تر، تنها در ۱/۱ درصد از سؤالات دارای دو بازنمایی، بازنمایی‌های کلامی و گرافیکی تلفیق شده‌اند و در ۳/۷ درصد از چنین سؤالاتی بازنمایی‌های کلامی و نمادین مرتبط شده‌اند. همچنین در حدود ۱۴ درصد از کل واحدها، بیش از دو بازنمایی به کار گرفته شده‌اند. نتایج حاصل از بررسی دقیق‌ترِ سؤالاتی که در آنها بیش از دو نوع بازنمایی به‌کاررفته است، در جدول ۳ مشخص شده است.

جدول ۳- درصد فراوانی انواع سؤالات دارای بیش از دو نوع بازنمایی

بازنمایی‌ها	فصل ۱	فصل ۲	فصل ۳	فصل ۴	فصل ۵	فصل ۶	فصل ۷	مجموع
عددی، نمادین، گرافیکی	۱۰/۲	۴/۴	۱/۸	۸/۹	۹/۱	–	۱/۸	۵/۱
عددی، کلامی، گرافیکی	۱/۷	۴/۴	–	–	۱۲/۱	–	–	۲
عددی، کلامی، نمادین	۶/۸	–	۵/۵	–	۳/۰۳	۲/۲	۱/۸	۲/۹
گرافیکی، کلامی، نمادین	۵/۱	–	–	۷/۱	–	–	۳/۷	۲/۶
هر ۴ نوع بازنمایی	۳/۴	–	–	۱/۸	۹/۱	–	۱/۸	۲

طبق جدول ۳، در این کتاب بازنمایی‌های **عددی**، **نمادین** و **گرافیکی** بیش از گروه‌های دیگر (۵/۱ درصد از کل واحدها) با یکدیگر مرتبط شده‌اند و تنها در ۲ درصد از واحدها هر چهار نوع بازنمایی مورداستفاده قرار گرفته‌اند. با استفاده از داده‌های دو جدول اخیر ویژگی هر یک از فصل‌های کتاب در به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه را می‌توان به شرح زیر بیان کرد:

- در فصل ۱ (مجموعه، الگو و دنباله) در ۲۸/۸ درصد از سؤالات، بیش از دو بازنمایی مرتبط شده‌اند. یعنی می‌توان گفت در مبحث مجموعه، الگو و دنباله از بازنمایی‌های چندگانه به نحو مطلوبی استفاده شده است. همچنین از بین سؤالات

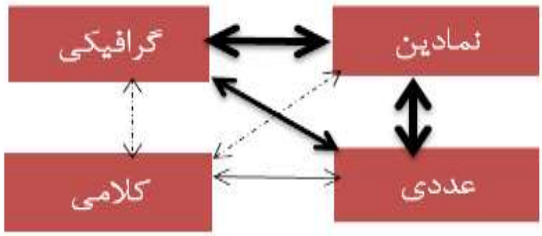
شامل دو بازنمایی، بیشترین ارتباط بین بازنمایی‌های **عددی** و **نمادین** و **گرافیکی** برقرار شده است. کمترین ارتباط نیز بین بازنمایی‌های گرافیکی و کلامی دیده می‌شود.

- در فصل ۲ (مثلثات) در ۱۱/۱ از کل سؤالات فصل، بازنمایی‌های **عددی** و **گرافیکی** و در ۴/۴ درصد از واحدها بازنمایی‌های عددی، نمادین و گرافیکی تلفیق شده‌اند.
- در فصل ۳ (توان‌های گویا و عبارت‌های جبری) نیز بیشترین ارتباط (۱۰/۹ درصد) بین بازنمایی‌های **عددی** و **نمادین** برقرار شده است و در ۵/۵ درصد از واحدها بازنمایی‌های **عددی**، **کلامی و نمادین** مورداستفاده قرار گرفته‌اند.
- در فصل ۴ (معادله‌ها و نامعادله‌ها) در ۱۹/۶ درصد از سؤالات فقط از یک نوع بازنمایی استفاده شده است و به همین میزان واحدهای تحلیلی وجود دارد که در آنها بیش از دو بازنمایی مرتبط شده‌اند که از میان آنها در حدود ۸/۹ درصد، بین بازنمایی‌های عددی، نمادین و گرافیکی ارتباط برقرار شده است.

در فصل ۵ (تابع) در ۳۳/۳ از واحدهای تحلیل بیش از دو بازنمایی به‌صورت مرتبط به کار برده شده‌اند. در این فصل هم به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه وضعیت نسبتاً خوبی دارد. در ۱۲/۱ درصد از واحدها، بین بازنمایی‌های عددی، کلامی و گرافیکی ارتباط برقرار شده است.

- در فصل ۶ (شمارش بدون شمردن) در ۱۱/۱ از سؤالات شامل دو بازنمایی، بازنمایی‌های نمادین و عددی مرتبط شده‌اند.
- در فصل ۷ (آمار و احتمال) در ۱۴/۶ از واحدها، بیش از دو بازنمایی با یکدیگر در ارتباط هستند.

به‌طورکلی نتایج حاصل از بررسی ارتباط دوگانه بازنمایی‌ها را می‌توان در شکل ۴ خلاصه کرد.



شکل ۴- ارتباط دوگانه بازنمایی‌ها

در شکل ۴، فلش‌های پررنگ ارتباط قوی، فلش‌های کم‌رنگ ارتباط ضعیف و فلش‌های خط‌چین، ارتباط بسیار ضعیف را نشان می‌دهند.

۳. بحث و نتیجه‌گیری

صاحب‌نظران آموزش ریاضی شورای ملی معلمان ریاضی (۲۰۰۰)، به استناد پژوهش‌های انجام شده به این نتیجه رسیده است اهمیت استفاده از بازنمایی‌های چندگانه باید در طول آموزش رسمی دانش‌آموزان موردتوجه قرار گیرد؛ به‌طوری‌که استفاده از بازنمایی‌ها برای درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی، بخش مهمی از فرایند یاددهی - یادگیری ریاضی را تشکیل دهد (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰)،. باتوجه‌به تأکیداتی ازاین‌دست، مطالعه حاضر جهت بررسی میزان به‌کارگیری بازنمایی‌ها و نحوه برقراری ارتباط بین آنها در کتاب ریاضی تازه تألیف پایه دهم رشته‌های تجربی و ریاضی، شکل گرفت. نتایج نشان داد تعداد زیادی از سؤالات کتاب، دو یا چند بازنمایی را ارائه کرده‌اند به‌طوری‌که دانش‌آموزان برای حل آنها، می‌بایست بین چند بازنمایی ارتباط برقرار کنند. مطالب فصل‌های اول و پنجمِ کتاب، برای تفهیم موضوعات، بیشترین تأکید را بر بازنمایی‌های چندگانه داشتند. موضوع این فصل‌ها الگو، دنباله و تابع است که به جهت ماهیت ذاتی در آموزش آنها، می‌توان از نمایش‌های متفاوتی استفاده کرد. در فصل‌های ۳ و ۶ و ۷ برای ارائه مطالب، از بازنمایی‌های چندگانه در موارد معدودی استفاده شده است و می‌توان گفت محتوای این فصل‌ها بیشتر بر یک نوع بازنمایی متمرکز است.

استفاده از بازنمایی‌های چندگانه نیازمند ترجمه نیز هست که بین نمایش‌های گوناگون از یک مفهوم انجام می‌گیرد. به‌منظور دستیابی به مفاهیمِ موردنظر هر درس و همچنین کسب مهارت در دست‌کاری اشیا و روابط ریاضی لازم است دانش‌آموزان صلاحیت‌هایی را در ترجمه بازنمایی‌ها به یکدیگر کسب کنند (آندرا[1] و همکاران، ۲۰۰۹). در کتاب تحت بررسی، بیشتر ترجمه‌ها و یا برقراری ارتباط، بین بازنمایی‌های **نمادین - گرافیکی**، **عددی - گرافیکی** و **نمادین - عددی** انجام شده

1. Andra

است. این نتیجه با یافته‌های مطالعه بوس و همکاران (۲۰۱۱) مطابقت دارد. نکته قابل‌ذکر دیگر این است که کتاب، بر برقراری ارتباط بین انواع بازنمایی‌های نمادین، عددی و گرافیکی با بازنمایی **کلامی** (یا برعکس)، تمرکز کمتری داشته است. به جهت آنکه بازنمایی‌های ریاضی دوره متوسطه دوم بیشتر از نوع نمادین، گرافیکی و عددی است، این نتیجه چندان دورازذهن نیست. در محتوای کتاب، کمترین ارتباط بین بازنمایی‌های **گرافیکی و کلامی** دیده می‌شود. این ترجمه‌ها از مشکل‌ترین نوع ترجمه برای دانش‌آموزان است (بوس و همکاران، ۲۰۱۱). به عقیده بوس و همکاران (۲۰۱۱)، این نوع ترجمه از نوع ترجمه غیرمستقیم بوده و در واقع در فرایند ترجمه، از یک بازنمایی واسطه‌ای کمک گرفته می‌شود که معمولاً یک جدول است.

یکی از دلایل ضعف دانش‌آموزان در حل مسئله ریاضی این است که آنها قادر نیستند به‌راحتی عبارات انتزاعی ریاضی را در قالب کلام بیان کنند. اگر آنها در محتوای درسی خود، با انواع تکالیفی روبرو شوند که در آنها حرکت منعطف بین بازنمایی‌های نمادین یا گرافیکی و بازنمایی‌های کلامی وجود داشته باشد، از یک سو پیچیدگی‌های احتمالی آن تکلیف برطرف می‌گردد و از سوی دیگر رابطه موجود بین نمادها و علائم ریاضی، بی‌پرده و شفاف رخ می‌نمایاند. در این صورت، یادگیرندگان خود را در کشف مفاهیم و رابطه‌های ریاضی تواناتر می‌یابند. این نکته به‌خوبی در مباحثی مانند تفسیر جدول‌های تعیین علامت، تعیین دامنه توابع مرکب و ... دیده می‌شود. همچنین تلفیق این بازنمایی‌ها به‌خصوص در مورد فصل سوم کتابِ موردمطالعه یعنی توان‌های گویا و عبارات جبری می‌تواند بسیار مفید باشد. چه‌بسا بسیاری از بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مورد مطالب انتزاعی‌تر، به کمک بازنمایی‌های کلامی قابل‌رفع باشد (کوادینگر[1]، ۲۰۰۴).

در مجموع بر طبق یافته‌های این مطالعه، در کتاب ریاضی پایه دهم، بازنمایی‌های چندگانه در یاددهی مباحثی مانند دنباله‌ها، معادلات و نامعادلات و تابع بیشتر مورداستفاده قرار گرفته‌اند و لازم است در بقیه فصل‌ها نیز به‌صورت جدی‌تر به کار گرفته شوند. لازم به ذکر است در آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه، نقش

1. Koedinger

تکنولوژی نباید نادیده گرفته شود (مویرپاکنهام[1]، ۲۰۲۱). استفاده از نرم‌افزارهایی همچون جئوجبرا[2] که به‌خوبی تعامل بین بازنمایی‌های نمادین و گرافیکی را نمایش می‌دهد، کمک خواهد کرد بدفهمی‌های دانش‌آموزان در مدت‌زمان کوتاه‌تری برطرف گردد؛ لذا یک توصیه این تحقیق به مؤلفان کتاب‌های درسی این است که در مواردی هرچند محدود استفاده از چنین نرم‌افزارهایی را در انجام برخی فعالیت‌ها دخیل کند. همچنین تعداد سؤالاتی که در آنها دانش‌آموز می‌بایست باتوجه‌به نمودار پاسخ دهد و یا حتی ویژگی‌های نمودار را در قالب کلام توضیح دهد، بیشتر گردد. اگرچه کمبود منابع فارسی و در دسترس نبودن تیم متخصص در امر کدگذاری، موجب شد انجام پژوهش حاضر با محدودیت‌هایی همراه باشد، لکن امید آن است که در آشکار نمودن نقشی که بازنمایی‌های چندگانه در یاددهی و یادگیری ریاضیات ایفا می‌کنند، گامی برداشته و سهمی هرچند کوچک در تشویق دیگر محققان برای انجام چنین مطالعاتی در مورد بقیه کتاب‌های درسی ریاضی داشته باشد. در پایان پیشنهاد می‌شود در تحقیقات آینده، کتاب‌های درسی ریاضی در دیگر پایه‌ها نیز از لحاظ میزان به‌کارگیری بازنمایی‌های چندگانه مورد بررسی قرار گیرند. همچنین محققان تأثیر آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه را در مورد مباحثی که دانش‌آموزان در آنها با بدفهمی‌های متعددی مواجه هستند، موردمطالعه قرار دهند.

منابع

امیری، حمیدرضا و همکاران (۱۴۰۰)، ***ریاضی (۱) پایه دهم دوره دوم متوسطه***. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی، وزارت آموزش‌وپرورش.

ای ریس، رابرت (۱۳۹۱)، ***کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات***، ترجمه مسعود نوروزیان، تهران، مؤسسه فرهنگی مدرسه برهان، انتشارات مدرسه.

دافعی، حمید (۱۳۸۹)، ***بازنمایی‌های چندگانه در آموزش ریاضی***، *رشد آموزش ریاضی*، دوره بیست و هفتم، شماره ۴، ۷۵-۷۰.

1. Moyer-Packenham
2 .GeoGebra

دافعی، حمید (۱۳۹۴)، ***بازنمایی چندگانه راهبردی برای آموزش مفاهیم ریاضی***، *رشد تکنولوژی آموزشی*، دوره سی و یکم، شماره ۳، ۴۶-۴۴.

دبیرخانه تولید برنامه درسی (۱۳۹۱)، ***برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران: نگاشت نهایی***، تهران، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

ریحانی، ابراهیم؛ بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ و معینی، تریفه (۱۳۸۸)، ***بررسی سیر تکاملی دانش مفهومی و دانش رویه‌ای و رابطه میان آنها***، *فصلنامه نوآوری‌های آموزشی*، شماره ۲۹، ۵۱-۲۷.

عرب‌زاده، رضا؛ حاجی‌بابایی، جواد؛ و ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۰)، ***تأثیر آموزش تجسم محور بر عملکرد حل مسئله ریاضی دانش‌آموزان سال سوم راهنمایی***، *فصلنامه نوآوری‌های آموزشی*، سال نهم، شماره ۳۸، ۵۰-۲۵.

قربانی سی‌سخت، زینب (۱۳۸۸)، ***بررسی اثر آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه روی درک دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی از کسرها***، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

گویا، زهرا؛ و حسام، عبدالله (۱۳۸۴)، ***نقش طرح‌واره‌ها در شکل‌گیری بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان***، *رشد آموزش ریاضی*، دوره بیست و سوم، شماره دو، ۱۵- ۴.

گویا، زهرا و امامی، علی (۱۳۹۲)، ***بازنمایی‌ها و نقش آنها در درک مفهوم تابع***، *رشد آموزش ریاضی*، دوره سی و یکم، شماره دو، ۳۵-۲۴.

محسن‌پور، مریم؛ گویا، زهرا؛ شکوهی یکتا، محسن؛ کیامنش، علیرضا؛ و بازرگان، عباس (۱۳۹۳)، ***سنجش تشخیصی صلاحیت‌های سواد ریاضی***. *فصلنامه نوآوری‌های آموزشی*، شماره ۵۳، ۳۳-۷.

نوروزی لرکی، فرزانه؛ بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ قربانی سی‌سخت، زینب (۱۳۸۹)، ***بازنمایی‌های چندگانه فرایندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها***، نشریه علمی، پژوهشی، فناوری آموزش، سال پنجم، جلد ۵، شماره ۱، ۲۴-۱۳.

هولستی، ال-. ار (۱۳۸۰)، ***تحلیل محتوا در علوم اجتماعی و انسانی***، ترجمه: نادر سالار زاده امیری، تهران، انتشارات دانشگاه علامه طباطبایی، چاپ دوم.

Ainsworth, S. (2006). ***DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations***. *Learning and instruction*, *16*(3), 183-198.

Ainsworth, S. (1999). ***The functions of multiple representations***. *Computers & Education*, *33*(2), 131-152.

Andrà, C., Arzarello, F., Ferrara, F., Holmqvist, K., Lindström, P., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). ***How students read mathematical representations: An eye tracking study***. In *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 49-56). Thessaloniki, Greece: PME.

Bakar, K. A., Mohamed, S., Yunus, F., & Karim, A. A. (2020). ***Use of multiple representations in understanding addition: The case of pre-school children***. International Journal of Learning, Teaching and Educational Research, 19(2), 292-304.

Bahr, D. L., & Bossé, M. J. (2008). ***The State of Balance Between Procedural Knowledge and Conceptual Understanding in Mathematics Teacher Education***.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. (2011). ***Translations among mathematical representations: Teacher beliefs and practices***. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*, *15*(6), 1-23.

Bransford, J. D., & Schwartz, D. L. (1999). ***Chapter 3: Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications***. Review of research in education, 24(1), 61-100.

Emerson RW, Anderson D, (2018). ***What Mathematical Images Are in a Typical Mathematics Textbook? Implications for Students with Visual Impairments***. Journal of Visual Impairment & Blindness.112(1):20-32.

Garofalo, J., & Trinter, C. P. (2012). ***Tasks that make connections through representations***. *Mathematics Teacher*, *106*(4), 302-307.

Gitonga, I. (2016). ***Utilizing semiotic perspective to investigate algebra ii students'exposure to and use of multiple representations in understanding algebraic concepts.***

Kozma, R. B. (2020). ***Use of multiple representations by experts and novices***. In Handbook of learning from multiple representations and perspectives (pp. 33-47). Routledge.

Kurnaz, M. A., & Bayri, N. G. (2018). The analysis of secondary school students'transition situations in multiple representations. *Science Education International*, *29*(1)), 3-10.

Koedinger, K. R., & Nathan, M. J. (2004). ***The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning***. *The journal of the learning sciences*, *13*(2), 129-164.

Marchi, D. J. (2012). ***A Study of Student Understanding of the Sine Function through Representations and the Process and Object Perspectives*** (Doctoral dissertation, The Ohio State University).

Moyer-Packenham, P. S., Roxburgh, A. L., Litster, K., & Kozlowski, J. S. (2021). ***Relationships Between Semiotic Representational Transformations and Performance Outcomes in Digital Math Games***. Technology, Knowledge and Learning, 1-31.

National council of Teacher of Mathematics, (2000). ***Principle and Students for School Mathematics***. Reston VA: Author.

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2017). ***Supporting students in making sense of connections and in becoming perceptually fluent in making connections among multiple graphical representations***. Journal of Educational Psychology,109(3), 355.

Rau, M. A., & Matthews, P. G. (2017). H***ow to make 'more'better? Principles for effective use of multiple representations to enhance students' learning about fractions***.*ZDM*, *49*(4), 531-544.

Schwartz, D. L. (1995). ***The emergence of abstract representations in dyad problem solving.*** The Journal of the Learning Sciences, 4(3), 321-354.

Selling, S. K. (2016). ***Learning to represent, representing to learn***. *The Journal of Mathematical Behavior*, *41*, 191-209.

Sochański M, (2018). ***What is Diagrammatic Reasoning in Mathematics?.*** Logic and Logical Philosophy, 1-15.

Tackie, N. A., Sheppard, P., & Flint, T. K. (2019). ***Engendering algebraic readiness through pictorial representations***.Investigations in Mathematics Learning, 11(3), 207-219.

Ulusoy, F., & Incikabi, L. (2019). ***Incorporating Representation-Based Instruction into Mathematics Teaching: Engaging Middle Schoolers with Multiple Representations of Adding Fractions***. In Handbook of Research on Promoting Higher-Order Skills and Global Competencies in Life and Work (pp. 311-336). IGI Global.